Lehrstuhl für Multimediakommunikation und Signalverarbeitung
Universität Erlangen–Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. W. Kellermann

Schriftliche Prüfung

im Fach

Stochastische Prozesse

18. Februar 2009

5 Aufgaben – 120 Punkte

120 Minuten

Aufgabe 1

28 Punkte

Beantworten Sie die folgenden Fragen 1.) bis 7.) auf dem beiliegenden karierten Papier (nicht auf dem Aufgabenblatt), indem Sie jeweils für jede der Aussagen A) bis D) entscheiden, ob sie korrekt ist oder nicht. Schreiben Sie z. B.

1.) A, $\bar{\text{B}}$, C, $\bar{\text{D}}$

wenn Sie der Meinung sind, dass bei Frage 1.) die Aussagen A), C) zutreffen und die Aussagen B) und D) nicht zutreffen. Eine Begründung ist nicht notwendig. Bei jeder Frage können 0 bis 4 der gegebenen Aussagen richtig sein. Falsche Antworten führen zu Punktabzug.

1.) Gegeben sind die beiden ZVn X und Y. Beide sind statistisch unabhängig und gemeinsam normalverteilt. Die WDF für X ist gegeben durch $f_X(x) = \mathcal{N}(0, 1)$, die WDF für Y durch $f_Y(y) = \mathcal{N}(0, \sqrt{2})$. (4 Punkte)

A) Es gilt: $2\int_0^\infty f_X(x)dx = \int_0^\infty f_Y(y)dy$

B) Definiert man Z als $Z = X + jY$, so ist der Betrag von Z, $|Z|$ Rayleigh-verteilt.

C) Definiert man U als $U = X + Y$, so ergibt sich für die WDF von U:

$$f_U(u) = \mathcal{N}(0, \sqrt{3})$$

D) Definiert man V als $V = X - Y$, so ergibt sich für die WDF von V:

$$f_V(v) = \mathcal{N}(0, \sqrt{3})$$

2.) Es wird ein stationärer Gauß-Prozess $X(t)$ betrachtet. Die WDF von $X(t)$ ist gegeben durch $f_X(x) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, das LDS durch $S_{XX}(j\omega) = \alpha$. Welche Aussagen sind richtig? (4 Punkte)

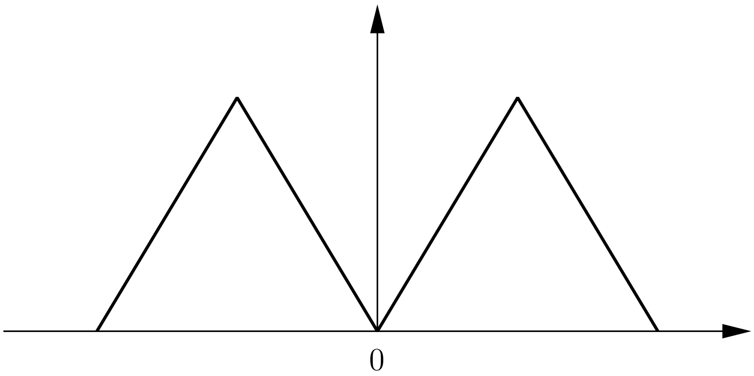
A) Wenn σ endlich ist, ist der Wertebereich von $X(t)$ beschränkt.

B) Der Prozess $X(t)$ ist weiß.

C) Definiert man $Z(t) = X(t+t_0) - X(t-t_0)$ mit $t_0 > 0$, ist $Z(t)$ ein weißer Prozess.

D) Die Zufallsvariable $Y = \sum_{m=1}^{M} X^2(t_m)$ ist χ^2-verteilt, wenn $\alpha = 0$ und $\sigma = 1$ gilt.

3.) Gegeben ist die folgende graphische Darstellung einer Funktion:



Was könnte diese graphische Darstellung beschreiben? (4 Punkte)

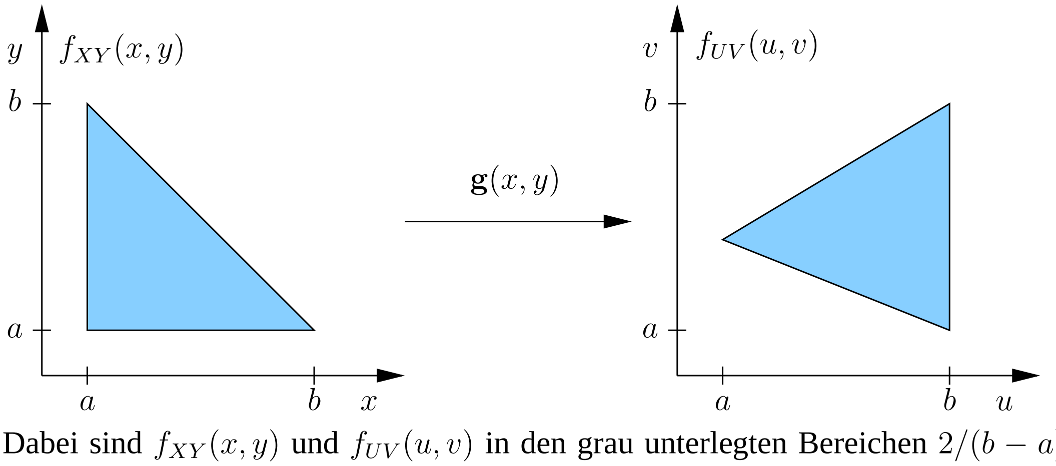
A) Die WDF eines stationären, reellen ZPes.

B) Die AKF eines stationären, reellen ZPes.

C) Die KKF zweier stationärer, reeller ZPe.

D) Das LDS eines stationären, reellen ZPes.

4.) Die ZVn X und Y werden durch die linearen Abbildungen $g_1(x,y)$ und $g_2(x,y)$ auf die Variablen U und V abgebildet. Es gilt $U = g_1(X,Y)$ und $V = g_2(X,Y)$. Die Abbildungen $g_1(X,Y)$ und $g_2(X,Y)$ werden im Vektor $\mathbf{g}(x,y) = [g_1(x,y), g_2(x,y)]^T$ zusammengefasst, wobei $[\cdot]^T$ die Transposition darstellt.. Außerdem sind folgende graphische Darstellungen der Verbund-WDFen gegeben:



Dabei sind $f_{XY}(x,y)$ und $f_{UV}(u,v)$ in den grau unterlegten Bereichen $2/(b-a)^2$ und sonst 0. (4 Punkte)

Hinweis: Die genaue Kenntnis von $\mathbf{g}(x,y)$ ist zur Bearbeitung nicht notwendig.

A) Der Betrag der Jacobi-Determinante der Abbildung $\mathbf{g}(x,y)$ ist 1.

B) Die Variablen X und Y sind statistisch unabhängig.

C) Es gilt $\int_{\infty}^{\infty} f_{XY}(x,\alpha)dx = \int_{\infty}^{\infty} f_{XY}(\alpha,y)dy$.

D) Es gilt $\int_{\infty}^{\infty} f_{UV}(u,\alpha)du = \int_{\infty}^{\infty} f_{UV}(\alpha,v)dv$.

5.) Es wird der ZP $Y(t)$ betrachtet. Es gilt $Y(t) = \sum_{n=1}^{N} X_n(t)$, dabei sind die Prozesse $X_n(t)$ statistisch unabhängig, mittelwertfrei und gleichverteilt. (4 Punkte)

A) Je größer N ist, desto besser kann die Verteilung des Prozesses $Y(t)$ mit einer Gauß-Verteilung angenähert werden.

B) Es gilt: $R_{YY}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{N} R_{X_n X_n}(t_1, t_2)$.

C) Sind alle ZPe $X_n(t)$ ergodisch, so ist $Y(t)$ stationär.

D) Ist der ZP $Y(t)$ stationär, so sind die ZPe $X_n(t)$ notwendigerweise ergodisch.

6.) Die ZVn X und Y sind statistisch unabhängig. Die WDFen der beiden ZVn sind gegeben durch $f_X(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\varepsilon(x)$ und $f_Y(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\varepsilon(y)$. (4 Punkte)

A) Ist ein Schätzer $\hat{\Lambda}_1$ für λ_1 konsistent, so unterschreitet seine Varianz die Cramer-Rao-Schranke.

B) Sind zwei Schätzer $\hat{M}_X$ und $\hat{M}_Y$ für die Mittelwerte von X und Y erwartungstreu, so ist der Schätzer $\hat{D} = \hat{M}_X - \hat{M}_Y$ für den Mittelwert der Differenz $D = X - Y$ auch erwartungstreu.

C) Die Log-Likelihood-Funktion $\ln(f_{X|\lambda_1}(x|\lambda_1))$ weist ihr Maximum an der selben Stelle wie die Likelihood-Funktion $f_{X|\lambda_1}(x|\lambda_1)$ auf.

D) Gilt $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist $Z = X - Y$ mittelwertfrei.

7.) Es sind die ZPe $X(t)$ und $Y(t)$ gegeben. Beide Prozesse sind schwach stationär, unkorreliert und besitzen einen Mittelwert $m_X = m_Y = m$. Die Autokorrelationsfunktionen sind gegeben durch $R_{XX}(\tau) = R_{YY}(\tau) = e^{-|\tau|} + m^2$. Der ZP $Z(t)$ ist definiert durch $Z(t) = X(t-1) - Y(t+1)$. (4 Punkte)

A) Es gilt: $R_{ZZ}(\tau) = e^{-|\tau-1|} + e^{-|\tau+1|}$.

B) Es gilt: $C_{XX}(\tau) = e^{-|\tau|}$.

C) Es gilt: $C_{XY}(\tau) = 0$.

D) Es gilt: $C_{XZ}(\tau) = 0$.

Aufgabe 2

22 Punkte

Gegeben sind die beiden statistisch unabhängigen ZVn X_1 und X_2. Die WDFen der beiden Variablen sind gegeben durch

$$f_{X_1}(x_1) = e^{-x_1^2 \pi} \text{ und } f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Für die ZVn U und V gilt

$$U = X_1 + 2X_2,$$
$$V = X_1 - X_2 + 1.$$

a) Bestimmen Sie m_{X_1}, m_{X_2}, $\sigma_{X_1}^2$ und $\sigma_{X_2}^2$. (3 Punkte)

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X_2 > 0.8)$ und $P(X_2 < 0.8 \cap X_1 > 0)$ an. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}\{UV\}$. (4 Punkte)

d) Sind U und V unkorreliert? Sind U und V orthogonal? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die beiden ZVn X_1 und X_2 werden zu einem Zufallsvektor $\mathbf{X}$ zusammengefasst, außerdem sind der determinierte Vektor $\mathbf{b}$ und die determinierte Matrix $\mathbf{A}$ wie folgt gegeben:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & 3 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{X}$ wird nun wie folgt abgebildet:

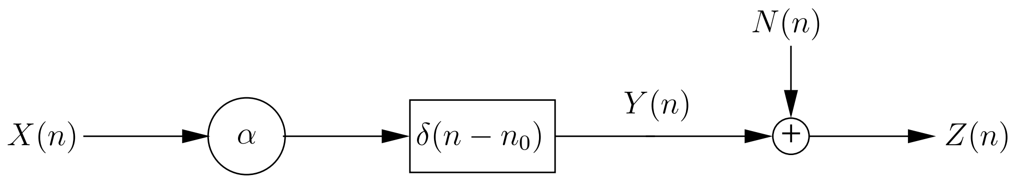
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{b}).$$

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}\{\mathbf{Y}\}$ in Abhängigkeit von α und β. (4 Punkte)

f) Sind Y_1 und Y_2 für $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ statistisch unabhängig? Berechnen Sie die Verbunddichte $f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)$ für $\alpha = 0$ und $\beta = 0$. (7 Punkte)

Aufgabe 3 18 Punkte

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild:



Dabei sind $X(n)$ und $N(n)$ zwei mindestens schwach stationäre Gaußprozesse, die zu den diskreten Zeitpunkten $n \in \mathbb{Z}$ abgetastet werden. Der mit "α" bezeichnete Block stellt eine Verstärkung um den Faktor α und der mit "$\delta(n-n_0)$" bezeichnete Block stellt eine Verzögerung um n_0 Abtastperioden dar. Es gilt $m_N = m_X = 0$ und $\alpha > 0$.

Ferner sind $R_{XX}(k)$, $R_{NN}(k)$ und $R_{XN}(k)$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
R_{XX}(k) &= \delta(k+1) + 3\delta(k) + \delta(k-1),\\
R_{NN}(k) &= 2\delta(k),\\
R_{XN}(k) &= -\delta(k+3).
\end{aligned}
$$

In den Teilaufgaben a) und b) seien $\alpha = 2$ und $n_0 = 1$.

a) Berechnen Sie σ_X^2 und σ_Y^2. Skizzieren Sie die WDFen von $X(n)$ und $Y(n)$, $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ in ein Koordinatensystem und beschriften Sie die vertikale Achse an der Stelle der Maxima der beiden Funktionen. (4 Punkte)

b) Zeichnen Sie eine beliebige, nicht verschwindende Musterfunktion von $X(n)$ für $n = -4, -3, \ldots, 3, 4$ und den dazugehörigen Verlauf von $Y(n)$ für $n = -3, -2, \ldots, 2, 3$ in getrennte Koordinatensysteme und beschriften Sie beide Achsen. (3 Punkte)

c) Handelt es sich bei $X(n)$ und/oder $N(n)$ um streng stationäre Prozesse? Sind $X(n)$ und/oder $N(n)$ weiße Rauschprozesse? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

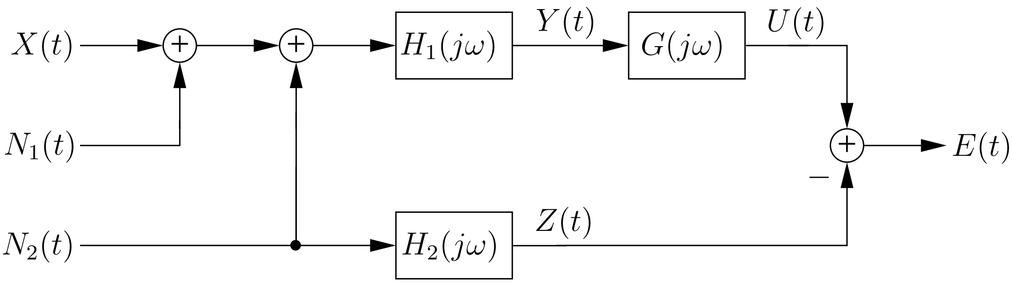
In den Teilaufgaben d) bis f) seien die Parameter α und n_0 unbekannt, aber determiniert.

d) Bestimmen Sie $R_{ZZ}(k)$ und $C_{ZZ}(k)$ in Abhängigkeit von α und n_0. (6 Punkte)

e) Berechnen Sie σ_Z^2 in Abhängigkeit von α und n_0. (2 Punkte)

Aufgabe 4 27 Punkte

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild zur Befreiung des Nutzsignals $X(t)$ von den Störsignalen $N_1(t)$ und $N_2(t)$:



Die ZPe $N_1(t)$, $N_2(t)$ und $X(t)$ sind statistisch unabhängig und mittelwertfrei. Die LDSen der ZPe $N_1(t)$, $N_2(t)$ und $X(t)$ sind gegeben durch

$$S_{N_1N_1}(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right) \quad \text{und} \quad S_{N_2N_2}(j\omega) = S_{XX}(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{6}\right).$$

Die Frequenzgänge $H_1(j\omega)$ und $H_2(j\omega)$ sind gegeben durch

$$H_1(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{8}\right) \quad \text{und} \quad H_2(j\omega) = \frac{\sqrt{\text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right) + 2\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{6}\right)}}{\text{rect}\left(\frac{\omega}{6}\right)}.$$

Dabei gilt

$$\text{rect}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die LDSen $S_{YY}(j\omega)$, $S_{ZZ}(j\omega)$ und $S_{ZY}(j\omega)$. Die angegebenen Funktionen für Frequenzgänge und LDSen brauchen dabei nicht eingesetzt zu werden. Sind $Y(t)$ und $Z(t)$ unkorreliert? Begründen Sie Ihre Antwort. (7 Punkte)

b) Setzen Sie die angegebenen Funktionen für Frequenzgänge und LDSen in den Ausdruck für $S_{YY}(j\omega)$ ein, zeichnen Sie $S_{YY}(j\omega)$ im Bereich $|\omega| \leq 4$ in ein Koordinatensystem und beschriften Sie beide Achsen. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie $m_Y^{(2)}$. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Frequenzgang $G(j\omega)$ eines allgemeinen nichtkausalen Wiener-Filters in Abhängigkeit der gegebenen LDSen und Frequenzgänge im Bereich $|\omega| \leq 3$, so dass $\mathcal{E}\{E^2(t)\}$ minimal wird. Die angegebenen Funktionen für die Spektren und Frequenzgänge brauchen dabei nicht eingesetzt zu werden. Wie kann $G(j\omega)$ außerhalb des Bereiches $|\omega| \leq 3$ gewählt werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

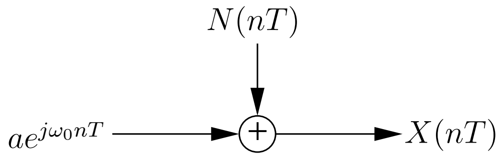
e) Zeigen Sie, dass $R_{EE}(\tau) = R_{ZZ}(\tau) - R_{UZ}(\tau)$ gilt. Nutzen Sie dabei die Orthogonalitätseigenschaft, die sich durch das Wiener-Filter ergibt. (3 Punkte)

f) Berechnen Sie $S_{EE}(j\omega)$ im Frequenzbereich $|\omega| \leq 3$. Verwenden Sie dabei das in d) ermittelte $G(j\omega)$ und die angegebenen LDSen und Frequenzgänge. (5 Punkte)

Aufgabe 5

25 Punkte

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild zur Schätzung der Amplitude komplexer Harmonischer:



Anhand von M Beobachtungen der Folge $X_n = X(nT),\ n = 0, 1, \ldots, M-1$ soll ein "Maximum Likelihood"-Schätzer für die Amplitude a bestimmt werden. Dabei ist a eine unbekannte, determinierte Größe und $e^{j\omega_0 nT}$ kann als bekannt angenommen werden. Die Abtastfolge $N(nT)$ ist einem stationären weißen Gauß-Prozess mit den Parametern $m_N = 0$ und $\sigma_N^2 = 1$ entnommen.

a) Bestimmen Sie den Mittelwert $m_X(nT)$ und Varianz $\sigma_X^2(nT)$ von $X(nT)$ als absolutes zentrales Moment 2. Ordnung. Beachten Sie dabei, dass die Folge $ae^{j\omega_0 nT}$ determiniert ist. Ist $X(nT)$ stationär, instationär oder zyklostationär? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\omega_0 = 0$ und $\omega_0 \neq 0$. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion für $f_{\mathbf{X}|a}(\mathbf{x}|a)$ und die dazugehörige Log-Likelihood-Funktion. Es darf dabei angenommen werden, dass $f_{\mathbf{X}|a}(\mathbf{x}|a) = \prod_{n=0}^{M-1} f_{X_n|a}(x_n|a)$. (3 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie für die nachfolgende Aufgabe die Log-Likelihood-Funktion

$$L = M\alpha - \beta \sum_{n=0}^{M-1} (X(nT) - ae^{j\omega_0 nT})^2.$$

c) Bestimmen Sie den ML-Schätzer $\hat{A}_{ML}$ zur Schätzung des Parameters a mit Hilfe von Beobachtungen der Funktion $X(nT)$. Dabei darf angenommen werden, dass $\sum_{n=0}^{M-1} e^{j2\omega_0 nT} \neq 0$ sicher gestellt ist. (5 Punkte)

d) Ist der ML-Schätzer $\hat{A}_{ML}$ erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort analytisch. (4 Punkte)

e) [*Nur StoPro*] Bestimmen Sie die Varianz des ML-Schätzer $\hat{A}_{ML}$ für $\omega_0 = 0$. Ist der Schätzer $\hat{A}_{ML}$ für $\omega_0 = 0$ konsistent? Begründen Sie Ihre Antwort analytisch. (6 Punkte)

f) Für welche Annahmen bezüglich a ist der ML-Schätzer $\hat{A}_{ML}$ gleichzeitig ein MAP-Schätzer? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)