Lehrstuhl für Multimediakommunikation und Signalverarbeitung
Universität Erlangen–Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. W. Kellermann

Musterlösung

zur

Schriftlichen Prüfung

im Fach

Stochastische Prozesse

9. September 2008

5 Aufgaben

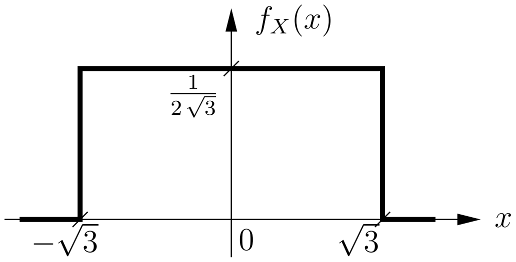
120 Minuten

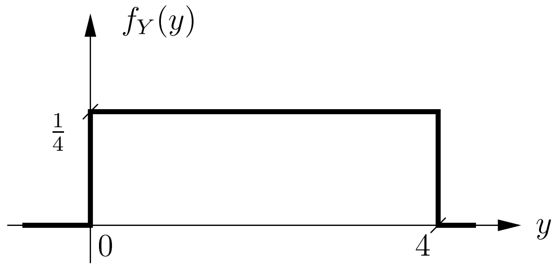
100 Punkte

Aufgabe 1

22 Punkte

a) Zeichnungen der WDFen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$:





(3 Punkte)

b) $P(X = 0) = 0$

$P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2}$

$P(X > 2) = 0$ (2 Punkte)

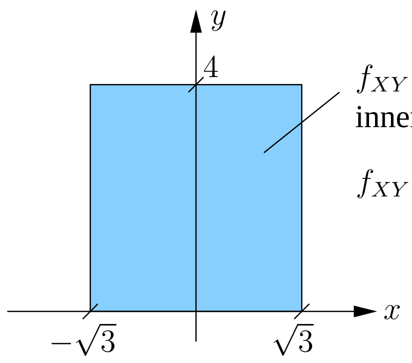
c) $m_X = 0$

$m_X^{(2)} = \frac{\sqrt{3}^3 + \sqrt{3}^3}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = 1$

$m_Y = 2$

$m_Y^{(2)} = \frac{4^3 + 0^3}{3 \cdot (4 - 0)} = \frac{16 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{16}{3}$ (3 Punkte)

d) Zeichnung der Verbunddichte $f_{XY}(x, y)$ in der Draufsicht:



$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{8 \cdot \sqrt{3}}$
innerhalb der grauen Fläche

$f_{XY}(x, y) = 0$ außerhalb

(3 Punkte)

e) X und Y sind statistisch unabhängig

$\Rightarrow X$ und Y sind unkorreliert

$\Rightarrow C_{XY} = 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}\{XY\} = \mathcal{E}\{X\} \cdot \mathcal{E}\{Y\} = 0 \cdot 2 = 0$

$\Rightarrow X$ und Y sind orthogonal

(3 Punkte)

f) $m_U = \mathcal{E}\{U\} = \mathcal{E}\{X + a\} = a$

$m_V = \mathcal{E}\{V\} = \mathcal{E}\{2\,U + Y + 2\} = 2\,a + 2 + 2 = 2\,a + 4$

$\mathcal{E}\{U\,V\} = \mathcal{E}\{(X + a)(2X + 2a + Y + 2)\}$

$= \mathcal{E}\{2X^2 + 2aX + XY + 2X + 2aX + 2a^2 + aY + 2a\}$

$= 2 + 2a^2 + 2a + 2a = 2a^2 + 4a + 2 = 2(a + 1)^2$

$C_{UV} = \mathcal{E}\{U\,V\} - m_U\,m_V$

$C_{UV} = 2a^2 + 4a + 2 - 2a^2 - 4a = 2$

$\Rightarrow U$ und V sind korreliert, da $C_{UV} \neq 0$. (6 Punkte)

g) $\mathcal{E}\{U\,V\} \stackrel{!}{=} 0$

$2(a + 1)^2 \stackrel{!}{=} 0$

$a = -1$

(2 Punkte)

Aufgabe 2

24 Punkte

1) $\bar{A}$ $\bar{B}$ C D

2) $\bar{A}$ B C D

3) $\bar{A}$ $\bar{B}$ C D

4) $\bar{A}$ B C $\bar{D}$

5) $\bar{A}$ B C $\bar{D}$

6) $\bar{A}$ B $\bar{C}$ $\bar{D}$

Aufgabe 3

12 Punkte

a) Ein Vergleich mit Gleichung (292) liefert:

$$\lambda = \frac{1}{b}$$

$$m_X = b$$

$$\sigma_X^2 = b^2$$

(2 Punkte)

b) Likelihood-Funktion:

$$f_{V|b}(v|b) = f_{X_1X_2|b}(x_1, x_2|b) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

$$= \frac{1}{b^2}\mathrm{e}^{-\frac{x_1+x_2}{b}}\varepsilon(x_1)\varepsilon(x_2)$$

Log-Likelihood-Funktion

$$L = \ln\left(f_{V|b}(v|b)\right) = -2\,\ln b - \frac{x_1 + x_2}{b} \quad (\text{für} \quad x_1, x_2 \geq 0)$$

(3 Punkte)

c) $$\frac{\partial L}{\partial b} = -\frac{2}{b} + \frac{x_1 + x_2}{b^2} \overset{!}{=} 0$$

$$b = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\hat{B}_{\mathrm{ML}} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

(4 Punkte)

d) Da

$$\mathcal{E}\left\{\hat{B}_{\mathrm{ML}}\right\} = \mathcal{E}\left\{\frac{X_1 + X_2}{2}\right\} = \frac{b + b}{2} = b\ ,$$

ist $\hat{B}_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu.

(3 Punkte)

Aufgabe 4

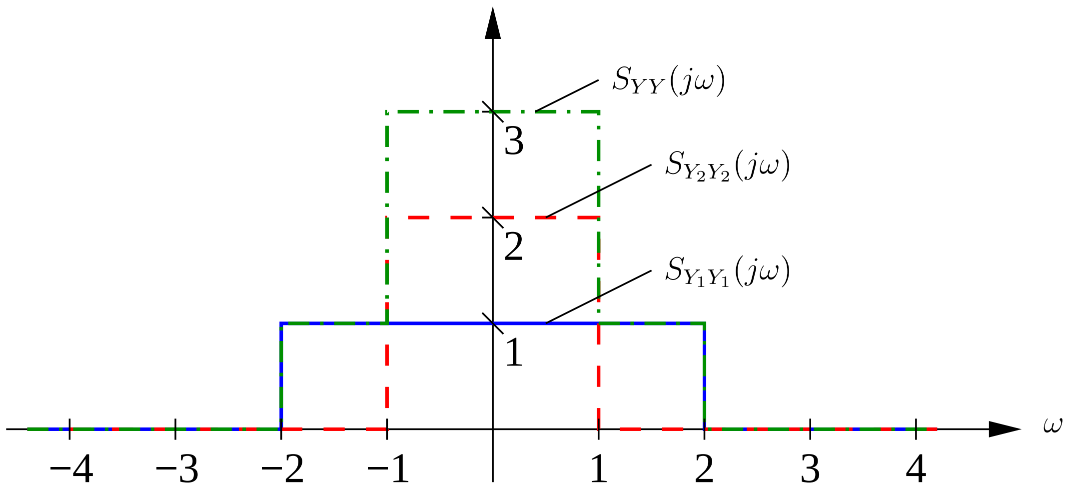
17 Punkte

a) $S_{Y_1Y_1}(j\omega) = |H_1(j\omega)|^2 \cdot S_{X_1X_1}(j\omega) = 4 \cdot \frac{1}{4}\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right)$

$S_{Y_2Y_2}(j\omega) = |H_2(j\omega)|^2 \cdot S_{X_2X_2}(j\omega) = 1 \cdot 2\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$S_{YY}(j\omega) = S_{Y_1Y_1}(j\omega) + S_{Y_2Y_2}(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right) + 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Skizze der LDSen $S_{Y_1Y_1}(j\omega)$, $S_{Y_2Y_2}(j\omega)$ und $S_{YY}(j\omega)$



(6 Punkte)

b) $m_{Y_1}^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{Y_1Y_1}(j\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

$m_{Y_2}^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{Y_2Y_2}(j\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{2}{\pi}$

$SNR = 10\,\log_{10}\left(\frac{m_{Y_1}^{(2)}}{m_{Y_2}^{(2)}}\right)\,\text{dB} = 0\,\text{dB}$ (4 Punkte)

c) $S_{YZ}(j\omega) = S_{(h_1*X_1+h_2*X_2)\cdot(g_2*X_2)} = H_2(j\omega) \cdot G_2^*(j\omega) \cdot S_{X_2X_2}(j\omega)$

$S_{ZZ}(j\omega) = S_{(g_2*X_2)\cdot(g_2*X_2)} = G_2(j\omega) \cdot G_2^*(j\omega) \cdot S_{X_2X_2}(j\omega)$

$W(j\omega) = \frac{S_{YZ}(j\omega)}{S_{ZZ}(j\omega)} = \frac{H_2(j\omega) \cdot G_2^*(j\omega) \cdot S_{X_2X_2}(j\omega)}{G_2(j\omega) \cdot G_2^*(j\omega) \cdot S_{X_2X_2}(j\omega)} = \frac{H_2(j\omega)}{G_2(j\omega)}$ (5 Punkte)

d) Da $G_2(j\omega) \cdot W(j\omega) = G_2(j\omega) \cdot \frac{H_2(j\omega)}{G_2(j\omega)} = H_2(j\omega)$, ist $U(t) = h_2(t) * X_2(t)$, und wir erhalten für $E(t)$:

$E(t) = h_1(t) * X_1(t) + h_2(t) * X_2(t) - h_2(t) * X_2(t) = h_1(t) * X_1(t) = Y_1(t)$

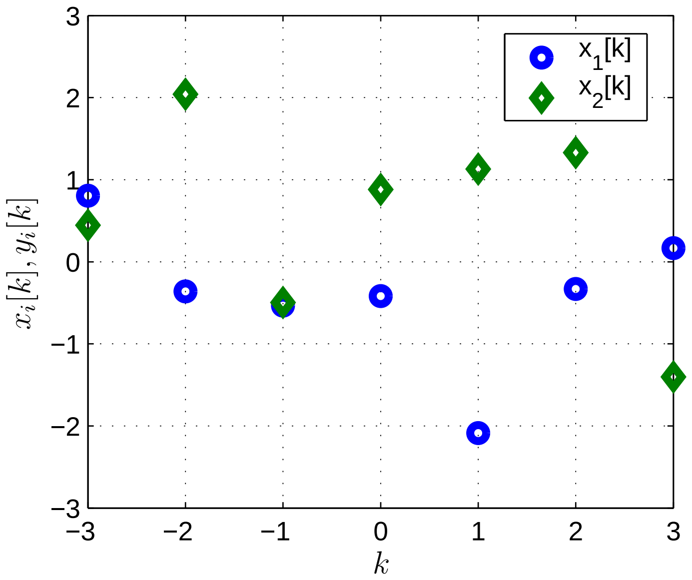
$S_{EE}(j\omega) = |H_1(j\omega)|^2 \cdot S_{X_1X_1}(j\omega) = S_{Y_1Y_1}(j\omega)$

Das Fehlersignal $E(t)$ entspricht dem Signal $Y_1(t)$, also einer mit $h_1(t)$ gefalteten Version des Wunschsignals $X_1(t)$. (2 Punkte)

Aufgabe 5

25 Punkte

a) Skizzen für die Musterfunktionen $x_i[k]$:



(2 Punkte)

b) Ein Vergleich der gegeben Dichte $f_X(x)$ mit Gleichung (211) im Skript liefert:

$m_X[k] = 0$

$\sigma_X^2[k] = 2$

Aufgrund der Mittelwertfreiheit und der Unkorreliertheit zweier ZVn $X[k_1]$ und $X[k_2]$ für $k_1 \neq k_2$ ergibt sich für die AKF:

$$R_{XX}[k_1, k_2] = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k_1 \neq k_2 \; , \\ m_X^{(2)}[k_1] = \sigma_X^2[k_1] = 2 & \text{für} \quad k_1 = k_2 \end{cases} = 2\;\delta(k_1 - k_2) = 2\;\delta(\kappa)$$

mit $\kappa = k_1 - k_2$. (4 Punkte)

c) Da die ZVn $X[k_1], X[k_2], \ldots, X[k_M]$ gemeinsam normalverteilt sind, ist der ZP $X[k]$ ein Gauß-Prozess.

Da $m_X[k] =$ const. und $R_{XX}[k_1, k_2] = R_{XX}[\kappa]$, ist $X[k]$ schwach stationär.

Da $X[k]$ ein Gauß-Prozess ist, folgt aus der schwachen Stationarität direkt die strenge Stationarität.

Da die ZVn $X[k_1]$ und $X[k_2]$ gemeinsam normalverteilt und unkorreliert sind, sind sie auch statistisch unabhängig. (4 Punkte)

d) $S_{XX}(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\,\{R_{XX}(\kappa)\} = \text{DTFT}\,\{2 \cdot \delta(\kappa)\} = 2 = \text{const.}$

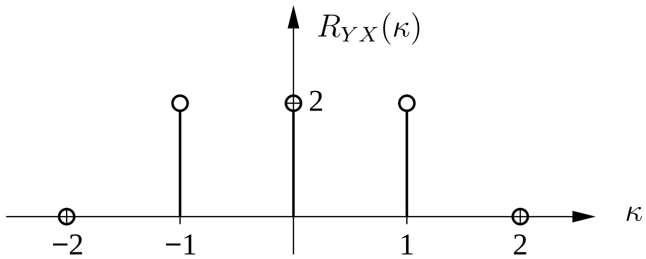
Da $S_{XX}(e^{j\Omega}) = \text{const.}$, handelt es sich bei $X[k]$ um weißes Rauschen. (3 Punkte)

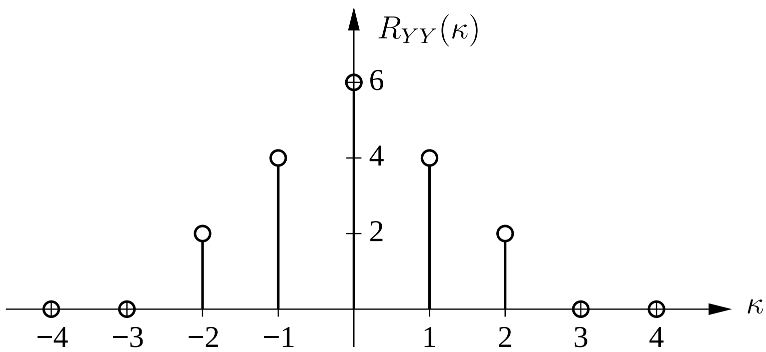
e) $S_{YX}(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) \cdot S_{XX}(e^{j\Omega}) = 2 \cdot \frac{\sin\left[(2N+1)\,\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$

$S_{YY}(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|^2 \cdot S_{XX}(e^{j\Omega}) = 2 \cdot \frac{\sin^2\left[(2N+1)\,\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$

Da $S_{YY}(e^{j\Omega}) \neq \text{const.}$, handelt es sich bei $Y[k]$ nicht um weißes Rauschen. (3 Punkte)

f) Zeichnungen der KKF $R_{YX}(\kappa)$ und der AKF $R_{YY}(\kappa)$:





(5 Punkte)

g) Da jeder Abtastwert von $Y[k]$ eine Summe aus gemeinsam normalverteilten ZVn ist, ist $Y[k]$ normalverteilt mit Mittelwert

$m_Y[k] = \sum_{n=-N}^{N} m_X[k] = 0$

und Varianz

$\sigma_Y^2[k] = \sum_{n=-N}^{N} \sigma_X^2[k] = 2 \cdot (2N+1)$.

Damit ergibt sich für die WDF $f_Y(y) = \mathcal{N}(0, \sqrt{2 \cdot (2\,N+1)}) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,(2\,N+1)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4\cdot(2\,N+1)}}$

(4 Punkte)