Lehrstuhl für Multimediakommunikation und Signalverarbeitung
Universität Erlangen–Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. W. Kellermann

Schriftliche Prüfung

im Fach

Stochastische Prozesse

9. September 2008

5 Aufgaben

120 Minuten

100 Punkte

Aufgabe 1

22 Punkte

Gegeben sind die beiden kontinuierlichen, reellen, statistisch unabhängigen ZVn X und Y. X ist gleichverteilt im Intervall $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, und Y ist gleichverteilt im Intervall $[0, 4]$.

a) Zeichnen Sie die WDFen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ in getrennte Koordinatensysteme. Bestimmen Sie die dazu notwendigen Werte und achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 0)$, $P(0 \leq X \leq 2)$ und $P(X > 2)$. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte m_X, $m_X^{(2)}$, m_Y und $m_Y^{(2)}$. (3 Punkte)

d) Zeichnen Sie die Verbunddichte $f_{XY}(x, y)$ in der Draufsicht, d.h. durch Kennzeichnung von Gebieten gleicher Dichte in der x-y-Ebene. Bestimmen Sie die dazu notwendigen Werte und achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen. (3 Punkte)

e) Bestimmen Sie die Kovarianz C_{XY} und den Erwartungswert $\mathcal{E}\{X\,Y\}$. Sind die ZVn X und Y unkorreliert, sind sie orthogonal? (3 Punkte)

Die ZVn U und V sind gegeben als:

$$U = X + a, \qquad V = 2\,U + Y + 2,$$

wobei a eine reelle Konstante ist.

f) Bestimmen Sie die Erwartungswerte m_U, m_V, $\mathcal{E}\{U\,V\}$ und C_{UV}. Sind die ZVn U und V unkorreliert? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe des Ergebnisses für C_{UV}. (6 Punkte)

g) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass U und V orthogonal sind. (2 Punkte)

Aufgabe 2

24 Punkte

Beantworten Sie die folgenden Fragen 1) bis 6) auf dem beiliegenden karierten Papier (nicht auf dem Angabenblatt), indem Sie jeweils für jede der Aussagen A) bis D) entscheiden, ob sie korrekt ist oder nicht. Schreiben Sie z. B.

1) A, $\bar{\text{B}}$, C, $\bar{\text{D}}$,

wenn Sie der Meinung sind, dass bei Frage 1) die Aussagen A), C) zutreffen und die Aussagen B), D) nicht zutreffen. Eine Begründung ist nicht notwendig. Bei jeder Frage können 0 bis 4 der gegebenen Aussagen richtig sein. Falsche Antworten führen zu Punktabzug.

---

1) Der Zufallsprozess $Z(t)$ ist gegeben durch $Z(t) = X(t) + Y(t)$, wobei $X(t)$ und $Y(t)$ zwei mittelwertfreie komplexe ZPe sind. Die AKF von $Z(t)$ läßt sich darstellen als $R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R^*_{XY}(-\tau) + R_{YY}(\tau)$. Was läßt sich daraus folgern? (4 Punkte)

A) $X(t)$ und $Y(t)$ sind jeweils streng stationär.

B) $X(t)$ und $Y(t)$ sind gemeinsam streng zyklostationär.

C) $X(t)$ und $Y(t)$ sind jeweils mindestens schwach stationär.

D) $X(t)$ und $Y(t)$ sind gemeinsam mindestens schwach stationär.

---

2) Die drei ZVn X_1, X_2 und X_3 sind unkorreliert und gemeinsam normalverteilt mit $m_{X_1} = m_{X_2} = m_{X_3} = 0$ und $\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2} = \sigma^2_{X_3} = 1$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu? (4 Punkte)

A) Die ZV $U = X_1 \cdot X_2$ ist Cauchy-verteilt.

B) Die ZV $V = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ ist χ^2-verteilt.

C) Die ZV $W = e^{X_1} \cdot e^{X_2}$ ist lognormal-verteilt.

D) Die ZV $Z = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$ ist Maxwell-verteilt.

---

3) Wir betrachten ein Fußballspiel zwischen Mannschaft A und Mannschaft B als ein Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge $H = \{'S', \ 'U', \ 'N'\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. Aus Sicht von Mannschaft A stehen dabei $'S'$, $'U'$ und $'N'$ für 'Sieg', 'Unentschieden' und 'Niederlage'. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind gegeben als:
$P('S') = 0.5$, $P('U') = 0.2$, $P('N') = 0.3$.
Welche der folgenden Aussagen treffen zu? (4 Punkte)

A) Für die Wahrscheinlichkeit, dass Mannschaft A nicht verliert, gilt:
$P('S' \cup \ 'U') = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$.

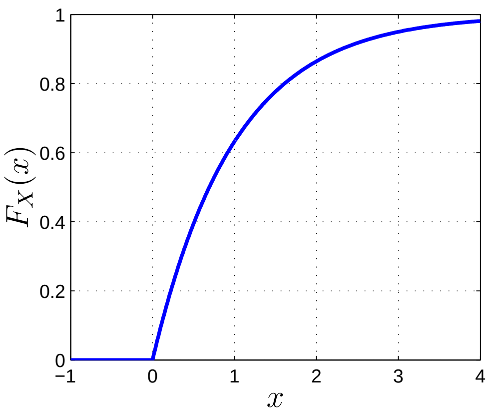
B) Die Menge $\mathcal{A}_1 = \{'S' \cup \ 'U', \ 'N'\}$ ist ein zulässiges Ereignisfeld von H.

C) Die Menge $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, 'S', 'U', 'N', 'S' \cup 'U', 'S' \cup 'N', 'U' \cup 'N', 'S' \cup 'U' \cup 'N'\}$ ist ein zulässiges Ereignisfeld und entspricht der Potenzmenge von H.

D) $P('S' \cup \ 'U' \cup \ 'N') = 1$.

---

4) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_X(x)$ der ZV X ist durch die untenstehende graphische Darstellung gegeben. Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus $F_X(x)$ folgern?



(4 Punkte)

A) X ist eine diskrete ZV.

B) Für das 0.8-Perzentil von X gilt: $x_{0.8} \approx 1.6$.

C) Für die Wahrscheinlichkeit, dass X größer 2 ist gilt: $P(X > 2) \approx 0.14$.

D) Für die Wahrscheinlichkeit, dass X gleich 3 ist gilt: $P(X = 3) \approx 0.95$.

---

5) Die ZV Z ist gegeben durch $Z = X + Y$, wobei X und Y statistisch unabhängige ZVn sind? Welche Aussagen können aus diesen Angaben gefolgert werden? (4 Punkte)

A) $f_Z(z) = f_X(z) + f_Y(z)$.

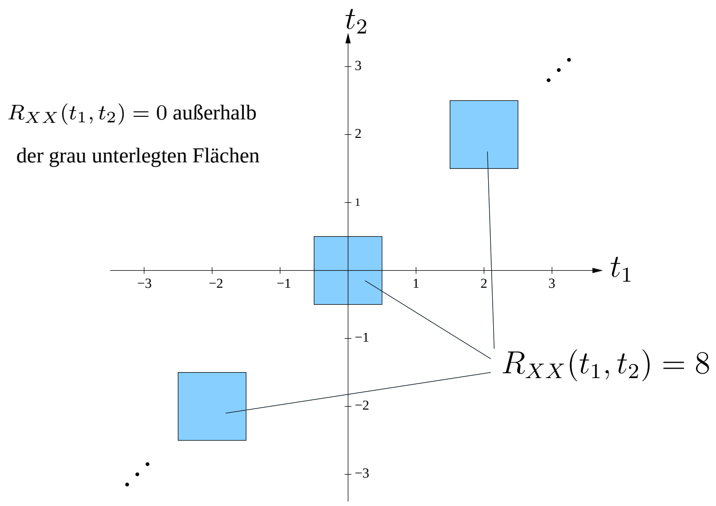
B) Für die Momenten-erzeugende Funktion $\Phi_Z(s)$ gilt: $\Phi_Z(s) = \Phi_X(s) \cdot \Phi_Y(s)$.

C) $C_{XY} = 0$.

D) $\mathcal{E}\{XY\} = 0$.

---

6) Die AKF des mittelwertfreien ZPes $X(t)$ ist durch die folgende Abbildung gegeben. Welche Aussagen treffen zu?



(4 Punkte)

A) $X(t)$ ist schwach stationär.

B) $X(t)$ ist schwach zyklostationär mit Periode $T = 2$.

C) $X(t)$ ist ergodisch bezüglich m_X und σ_X^2.

D) $X(t)$ ist ein weißer Rauschprozess.

Aufgabe 3

12 Punkte

Der determinierte, unbekannte Parameter $b \in \mathbb{R}$ der reellen, exponentialverteilten ZV X mit der WDF

$$f_X(x) = f_{X|b}(x|b) = \frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\,\varepsilon(x) \quad \text{mit} \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

soll im Folgenden anhand des Beobachtungsvektors

$$V = [X_1, X_2]$$

geschätzt werden. Dabei stellen die einzelnen Beobachtungen X_1 und X_2 statistisch unabhängige ZVn mit den WDFen $f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = f_X(x)$ dar.

a) Geben Sie den linearen Mittelwert m_X und die Varianz σ_X^2 der ZV X an. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $f_{V|b}(v|b) = f_{X_1X_2|b}(x_1, x_2|b)$ und die zugehörige Log-Likelihood-Funktion $L = \ln\left(f_{V|b}(v|b)\right)$. (3 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie für die nachfolgenden Teilaufgaben die folgende Log-Likelihood-Funktion

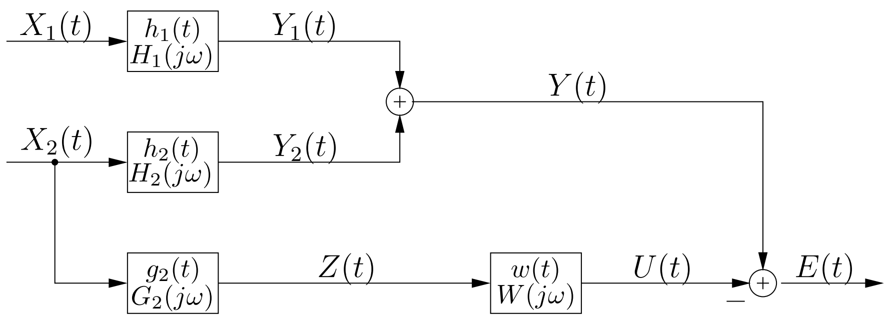
$$L = \ln\left(f_{V|b}(v|b)\right) = -2\,\ln(b) - \frac{x_1 + x_2}{b} \quad (\text{für} \quad x_1, x_2 \geq 0)$$

c) Bestimmen Sie den ML-Schätzer $\hat{B}_{\mathrm{ML}}$ zur Schätzung des Parameters b mit Hilfe des Beobachtungsvektors V. (4 Punkte)

d) Ist der ML-Schätzer $\hat{B}_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort analytisch. (3 Punkte)

Aufgabe 4

17 Punkte



In der obigen Anordnung zeitkontinuierlicher, linearer zeitinvarianter Systeme zur Interferenzunterdrückung sind die Übertragungsfunktionen $H_1(j\omega)$, $H_2(j\omega)$ und $G_2(j\omega)$ sowie die Auto-LDSen der reellen, mittelwertfreien, schwach stationären ZPe $X_1(t)$ und $X_2(t)$ gegeben. Das Wunschsignal $X_1(t)$ und das Störsignal $X_2(t)$ sind unkorreliert.

$$S_{X_1X_1}(j\omega) = 4\ , \qquad S_{X_2X_2}(j\omega) = 1\ ,$$

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right)\ , \qquad H_2(j\omega) = \sqrt{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)\ , \qquad G_2(j\omega) = \sqrt{3}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{5}\right)\ ,$$

$$\text{wobei} \quad \mathrm{rect}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \le \frac{1}{2}\ , \\ 0 & \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Die Übertragungsfunktion $W(j\omega)$ soll im Folgenden bestimmt werden.

a) Bestimmen Sie die LDSen $S_{Y_1Y_1}(j\omega)$, $S_{Y_2Y_2}(j\omega)$ und $S_{YY}(j\omega)$. Zeichnen Sie $S_{Y_1Y_1}(j\omega)$, $S_{Y_2Y_2}(j\omega)$ und $S_{YY}(j\omega)$ in getrennte Koordinatensysteme für $|\omega| \le 3$. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Signal-Rauschabstand $SNR = 10\,\log_{10}\left(\frac{m^{(2)}_{Y_1}}{m^{(2)}_{Y_2}}\right)$ dB des ZPes $Y(t)$. (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $W(j\omega)$ eines allgemeinen nichtkausalen Wiener-Filters in Abhängigkeit der gegebenen LDSen und Übertragungsfunktionen, so dass $\mathcal{E}\{E^2(t)\}$ minimal wird. Die gegebenen Funktionen für die Spektren und Frequenzgänge brauchen dabei nicht eingesetzt werden, und Sie können annehmen, dass alle Spektren und Frequenzgänge im interessierenden Frequenzbereich von Null verschieden sind. (5 Punkte)

d) Bestimmen Sie das LDS $S_{EE}(j\omega)$ des Fehlersignals für die in Teilaufgabe c) ermittelte Filterübertragungsfunktion $W(j\omega)$. Welchem Signal entspricht das Fehlersignal $E(t)$? (2 Punkte)

Aufgabe 5

25 Punkte

Der reelle, zeitdiskrete Zufallsprozess $X[k]$ ist normalverteilt mit der WDF

$$f_X(x,k) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$$

Die Zufallsvariablen $X[k_1]$, $X[k_2]$, $\ldots$, $X[k_M]$, die durch Betrachtung des ZPes $X[k]$ zu den unterschiedlichen Zeitpunkten k_1, k_2, $\ldots$, k_M mit $k_i \in \mathbb{Z}$ entstehen, sind gemeinsam normalverteilt und unkorreliert.

a) Skizzieren Sie zwei verschiedene nichtverschwindende Musterfunktionen $x_1[k]$ und $x_2[k]$ des ZPes $X[k]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem für $|k| \leq 3$. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $m_X[k]$, $\sigma_X^2[k]$ und $R_{XX}[k_1,k_2]$. (4 Punkte)

c) Ist der ZP $X[k]$ ein Gauß-Prozess? Ist er schwach/streng stationär? Sind die ZVn $X[k_1]$ und $X[k_2]$ für $k_1 \neq k_2$ statistisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antworten jeweils stichpunktartig. (4 Punkte)

d) Bestimmen Sie das Auto-LDS $S_{XX}(e^{j\Omega})$. Handelt es sich beim ZP $X[k]$ um weißes Rauschen? Begründen Sie Ihre Antwort stichpunktartig. (3 Punkte)

Aus dem Zufallsprozess $X[k]$ wird der Zufallsprozess $Y[k]$ folgendermaßen gebildet:

$$Y[k] = \sum_{n=-N}^{N} X[k-n] = h[k] * X[k], \quad \text{mit} \quad h[k] = \mathrm{rect}_N[k] = \begin{cases} 1 & \text{für } |k| \leq N\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Die zu $h[k]$ gehörige Übertragungsfunktion $H(e^{j\Omega})$ ist gegeben durch

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sin\left[(2N+1)\,\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\,.$$

e) Bestimmen Sie die LDSen $S_{YX}(e^{j\Omega})$ und $S_{YY}(e^{j\Omega})$ für beliebige $N \in \mathbb{N}$. Handelt es sich beim ZP $Y[k]$ um weißes Rauschen? (3 Punkte)

f) Zeichnen Sie die Korrelationsfunktionen $R_{YX}[\kappa]$ und $R_{YY}[\kappa]$ für $N = 1$ in getrennte Koordinatensysteme. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung. (5 Punkte)

g) Bestimmen Sie die WDF $f_Y(y,k)$ (für beliebige $N \in \mathbb{N}$). Begründen Sie die Wahl der Verteilung stichpunktartig. (4 Punkte)