Lehrstuhl für Multimediakommunikation und Signalverarbeitung
Universität Erlangen–Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. W. Kellermann

Schriftliche Prüfung

im Fach

Systemtheorie II

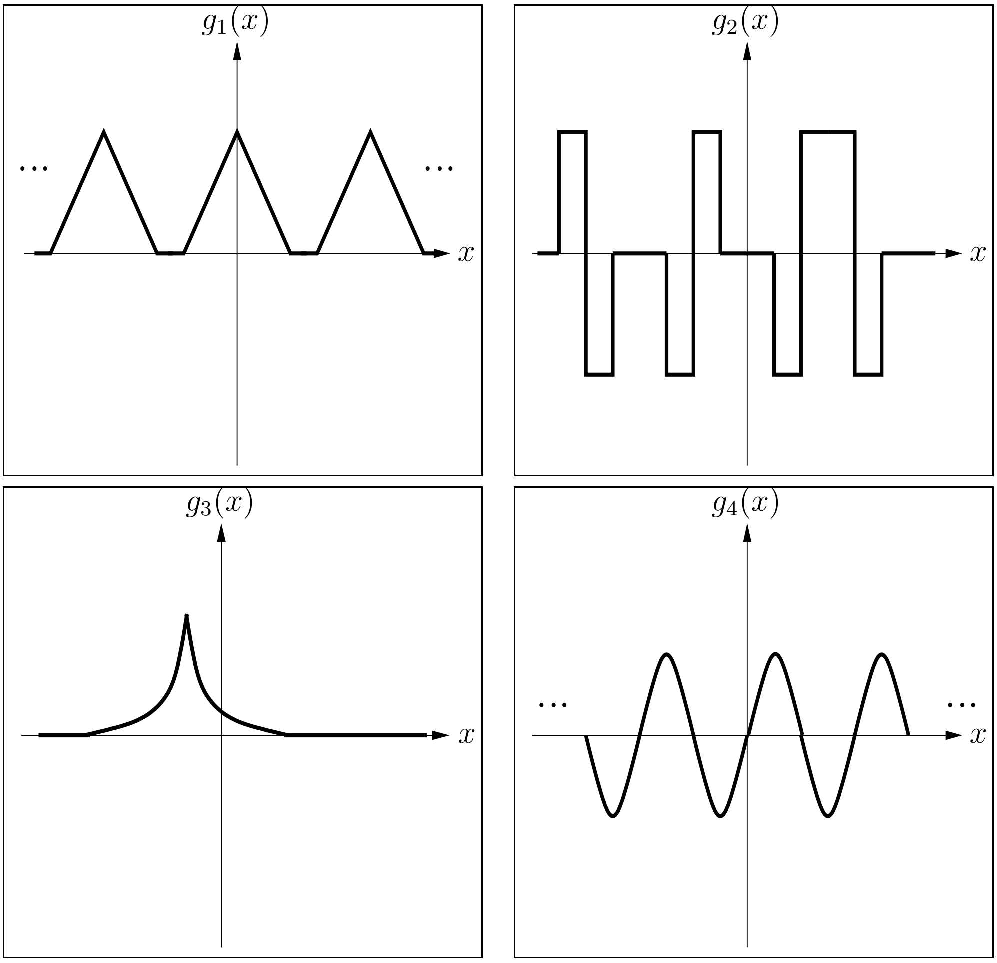
21. Februar 2007

5 Aufgaben

Aufgabe 1

14 Punkte

Auf dem Bildschirm eines Signalanalysators sehen Sie folgende grafische Darstellungen reeller Funktionen $g_i(x)$:



Geben Sie in jeder der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis d) die möglichen Zuordnungen an und begründen Sie Ihre Entscheidung jeweils stichpunktartig.

Welche der reellen Funktionen $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ und/oder $g_4(x)$ kann sein ...

a) die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ einer kontinuierlichen Zufallsvariable X? (3 Punkte)

b) die Musterfunktion $y_i(t)$ (mit $x = t$) eines mittelwertfreien, ergodischen Zufallsprozesses $Y(t)$? (3 Punkte)

c) die Autokorrelationsfunktion (AKF) $R_{UU}(\tau)$ (mit $x = \tau$) eines **periodischen**, zeitkontinuierlichen, stationären, reellen Zufallsprozesses $U(t)$? (3 Punkte)

d) die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) $R_{VW}(\tau)$ (mit $x = \tau$) zweier zeitkontinuierlicher, stationärer, reeller Zufallsprozesse $V(t)$ und $W(t)$, wenn gilt $W(t) = V(t - t_0)$? Dabei ist t_0 eine positive reelle Konstante. (5 Punkte)

Bitte beachten Sie: Jede Funktion $g_i(x)$ kann unter Umständen mehrere Möglichkeiten a) bis d) erfüllen.

Aufgabe 2

23 Punkte

Gegeben ist die reelle, Laplace-verteilte Zufallsvariable (ZV) X mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$$

und der Momenten-erzeugenden Funktion

$$\Phi_X(s) = \frac{1}{1-s^2}\ .$$

a) Skizzieren Sie die WDF $f_X(x)$. Berechnen Sie dazu die Werte von $f_X(x)$ für $x = -1$, $x = 0$, und $x = 1$. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung. Handelt es sich um eine diskrete oder eine kontinuierliche ZV? Begründen Sie Ihre Antwort stichpunktartig. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 0)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$. (5 Punkte)

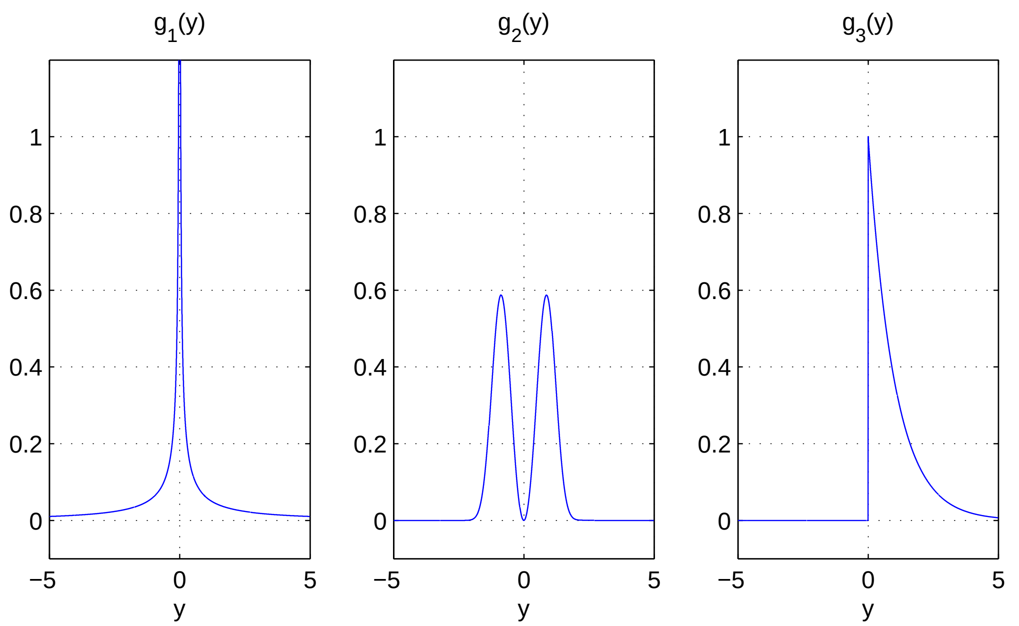
c) Bestimmen Sie die Kumulanten-erzeugende Funktion $\Psi_X(s)$. Leiten Sie **mit Hilfe von** $\Psi_X(s)$ den linearen Mittelwert m_X und die Varianz σ_X^2 von X ab. (6 Punkte)

d) Die ZV X wird nun auf die ZV Y abgebildet mit

$$Y = g(X) = X^3\ .$$

Bestimmen Sie die WDF $f_Y(y)$ von Y. (4 Punkte)

e) Welche der nachfolgenden Funktionen $g_1(y)$ bis $g_3(y)$ stellt die WDF $f_Y(y)$ dar? Begründen Sie Ihre Antwort stichpunktartig. (2 Punkte)



Aufgabe 3

20 Punkte

Betrachtet wird der zeitkontinuierliche, reelle Gaußprozess X(t) mit der WDF

$$f_X(x,t) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{18}}$$

und der AKF

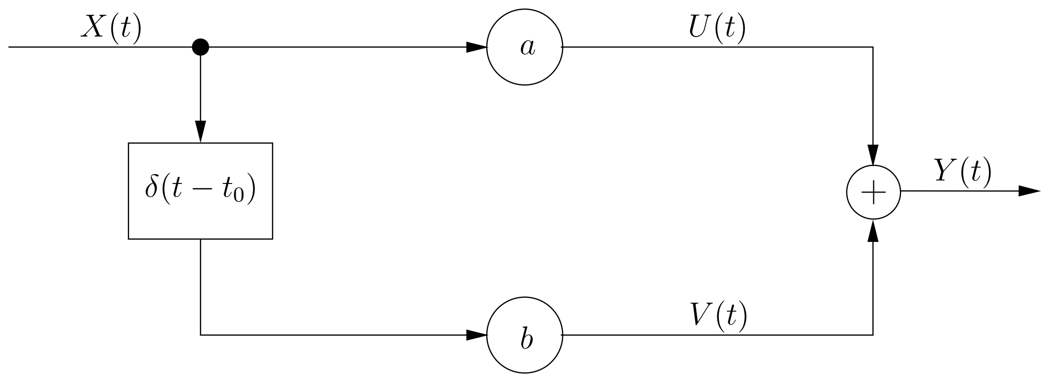
$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) \ ,$$

wobei

$$R_{XX}(t_1 - t_2) = 0 \quad \text{für} \quad |t_1 - t_2| \geq t_0 \ .$$

Die im folgenden Blockdiagramm dargestellte Anordnung, in der das System mit der Impulsantwort $\delta(t-t_0)$ eine Verzögerung um $t_0 > 0$ bewirkt, erzeugt die Zufallsprozesse $U(t) = a \cdot X(t)$, $V(t) = b \cdot X(t - t_0)$ und $Y(t) = U(t) + V(t)$. Dabei sind a und b reelle und von Null verschiedene Konstanten.

Durch Betrachtung der ZPe zum Zeitpunkt t_1 entstehen die Zufallsvariablen $X_1 = X(t_1)$, $U_1 = U(t_1)$, $V_1 = V(t_1)$ und $Y_1 = Y(t_1)$.



a) Bestimmen Sie den Mittelwert $m_X(t)$ und die Varianz $\sigma_X^2(t)$ des Zufallsprozesses (ZP) $X(t)$. Ist der ZP $X(t)$ schwach stationär (WSS)? Ist $X(t)$ streng stationär (SSS) oder kann darüber keine Aussage getroffen werden? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils stichpunktartig. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}\{U_1 V_1\}$. Sind die ZVn U_1 und V_1 unkorreliert, sind sie orthogonal, sind sie statistisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils stichpunktartig. (6 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Verbund-WDF $f_{U_1 V_1}(u_1, v_1)$ der ZVn U_1 und V_1. (4 Punkte)

d) Bestimmen Sie die WDF $f_{Y_1}(y_1)$ der ZV Y_1. (4 Punkte)

Aufgabe 4

25 Punkte

Gegeben ist der exponentiell verteilte ZP $X(t)$ mit der WDF

$$f_X(x,t) = \frac{1}{(t+1)\cdot a} \cdot e^{-\frac{1}{(t+1)\cdot a}\cdot x} \cdot \varepsilon(x) = f_{X|A}(x,t|a) \ .$$

Durch Betrachtung des ZPes zu den Zeiten $t_1 \neq t_2$ erhalten wir die statistisch unabhängigen ZVn $X_1 = X(t_1)$ und $X_2 = X(t_2)$, die im Folgenden als Beobachtungen zur Schätzung des rellen Parameters a verwendet werden.

a) Skizzieren Sie die WDFen für die Zeiten $t = 0$ und $t = 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Setzen Sie für die Skizze $a = 1$ und berechnen Sie die Werte von $f_X(x,0)$ und $f_X(x,2)$ für $x = 0$ und $x = 1$. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie den linearen Mittelwert $m_X(t)$ und die AKF $R_{XX}(t_3,t_4)$. Ist der ZP $X(t)$ schwach stationär (WSS)? Begründen Sie Ihre Antwort stichpunktartig. (8 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $f_{X_1X_2|A}(x_1,x_2|a)$ der beiden Beobachtungen X_1 und X_2 und die zugehörige Log-Likelihood-Funktion $J(a) = \ln f_{X_1X_2|A}(x_1,x_2|a)$. (4 Punkte)

Verwenden Sie für die nachfolgenden Teilaufgaben die folgende Log-Likelihood-Funktion:

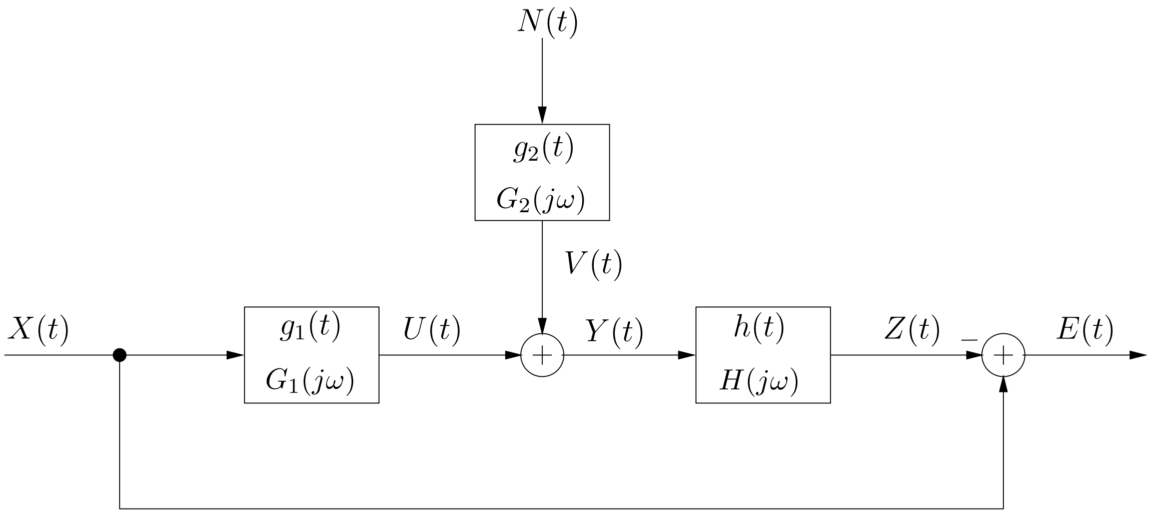
$$J(a) = -2\,\ln a - \ln(t_1+1) - \ln(t_2+1) - \left(\frac{x_1}{t_1+1} + \frac{x_2}{t_2+1}\right)\frac{1}{a} \quad \text{für} \quad x_1, x_2 \geq 0 \ .$$

d) Bestimmen Sie den 'Maximum-Likelihood'-Schätzer $\hat{A}_{ML}$ für den Parameter a aufgrund der Beobachtungen X_1 und X_2. (5 Punkte)

e) Ist der 'Maximum Likelihood'-Schätzer $\hat{A}_{ML}$ erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort durch kurzen rechnerischen Nachweis. (4 Punkte)

Aufgabe 5

18 Punkte



Gegeben ist die obige Anordnung zeitkontinuierlicher, linearer zeitinvarianter Systeme mit den reellwertigen Impulsantworten $g_1(t)$ und $g_2(t)$ sowie den entsprechenden Übertragungsfunktionen $G_1(j\omega)$ und $G_2(j\omega)$. Die zeitkontinuierlichen, reellen, stationären Zufallsprozesse $X(t)$ und $N(t)$ sind mittelwertfrei und statistisch unabhängig. Die Leistungsdichtespektren $S_{XX}(j\omega)$ und $S_{NN}(j\omega)$ sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} S_{XX}(j\omega) &= \frac{2}{1+\omega^2} , \\ S_{NN}(j\omega) &= N_0 . \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktionen $G_1(j\omega)$ und $G_2(j\omega)$ sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} G_1(j\omega) &= \sqrt{1+\omega^2} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right) , \\ G_2(j\omega) &= \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right) . \end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{VV}(j\omega)$ und bestimmen Sie das Moment zweiter Ordnung $m_V^{(2)}$ für den ZP $V(t)$. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{UU}(\tau)$ von $U(t)$. (4 Punkte)

Hinweis: Für die folgenden Teilaufgaben brauchen die gegebenen Werte für $G_1(j\omega)$, $G_2(j\omega)$, $S_{XX}(j\omega)$ und $S_{NN}(j\omega)$ nicht eingesetzt werden.

c) Bestimmen Sie die Leistungsdichtespektren $S_{YY}(j\omega)$ und $S_{XY}(j\omega)$ in Abhängigkeit von $G_1(j\omega)$, $G_2(j\omega)$, $S_{XX}(j\omega)$ und $S_{NN}(j\omega)$. (5 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ für ein nichtkausales Wiener-Filter in Abhängigkeit von $G_1(j\omega)$, $G_2(j\omega)$, $S_{XX}(j\omega)$ und $S_{NN}(j\omega)$, so dass der mittlere quadratische Fehler $\mathcal{E}\{E^2(t)\}$ minimal wird. (4 Punkte)