Lehrstuhl für Multimediakommunikation und Signalverarbeitung
Universität Erlangen–Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. W. Kellermann

Musterlösung

zur

Schriftlichen Prüfung

im Fach

Systemtheorie II

21. Februar 2007

5 Aufgaben

Aufgabe 1

14 Punkte

a) Zu überprüfen ist:

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx &= 1 \end{aligned}$$

Deshalb kommt nur $g_3(x)$ in Frage. (3 Punkte)

b) Bei einem ergodischen ZP ist der Zeitmittelwert mit Wahrscheinlichkeit Eins gleich dem Ensemblemittelwert. Deshalb muss für einen mittelwertfreiem ergodischem ZP gelten:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\,T} \int_{-\infty}^{\infty} y_i(t)\,dt = m_X = 0$$

Deshalb kommen nur $g_2(x)$ und $g_4(x)$ in Frage. (3 Punkte)

c) Zu überprüfen ist:

$$\begin{aligned} R_{UU}(-\tau) &= R_{UU}(\tau) \\ R_{UU}(0) &\geq |R_{UU}(\tau)| \quad \forall\,\tau \end{aligned}$$

Da $U(t)$ periodisch ist, muss auch $R_{UU}(\tau)$ periodisch sein.

Deshalb kommt nur $g_1(x)$ in Frage. (3 Punkte)

d) Es gilt

$$R_{VW}(\tau) = \mathcal{E}\{V(t+\tau)\,W(t)\} = \mathcal{E}\{V(t+\tau)\,V(t-t_0)\} = R_{XX}(\tau+t_0)$$

$R_{VW}(\tau)$ ist also eine um t_0 nach links verschobene AKF und somit muss gelten:
$R_{VW}(\tau)$ ist symmetrisch bezüglich $-t_0$
Das Maximum von $R_{VW}(\tau)$ liegt bei $-t_0$.

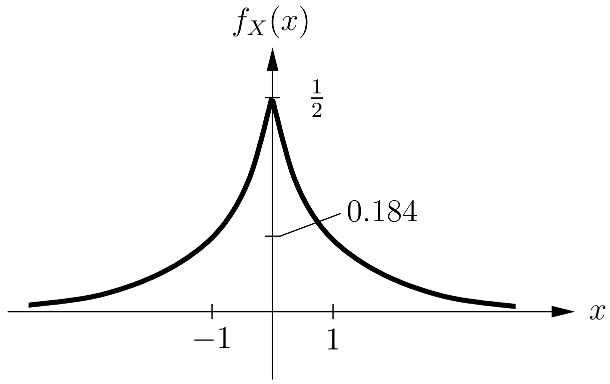
Deshalb kommen $g_3(x)$ und $g_4(x)$ in Frage.
Auch $g_1(x)$ ist möglich, wenn $V(t)$ periodisch mit Periodendauer T ist und gilt $t_0 = T$.
(5 Punkte)

Aufgabe 2 23 Punkte

a)

$$f_X(-1) = f_X(1) = \frac{1}{2}\, e^{-1} = 0.184$$
$$f_X(0) = \frac{1}{2}$$

Skizze:



X ist eine kontinuierliche ZV, da $f_X(x)$ keine Dirac-Impulse enthält. (6 Punkte)

b)

$$P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\, dx = 0.5$$

aufgrund der Symmetrie von $f_X(x)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= \int_2^\infty f_X(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_2^\infty e^{-x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[-e^{-x} \Big]_2^\infty = \frac{1}{2}(-0 + e^{-2}) = \frac{1}{2} e^{-2} = 0.0677 \end{aligned}$$

(5 Punkte)

c)

$$\Psi_X(s) = \ln \Phi_X(s) = \ln \frac{1}{1-s^2} = \ln 1 - \ln(1-s^2) = -\ln(1-s^2)$$

$$\begin{aligned} \Psi'_X(s) &= -\frac{-2s}{1-s^2} = \frac{2s}{1-s^2} \\ \Psi''_X(s) &= \frac{2\,(1-s^2) + 4\,s^2}{(1-s^2)^2} = \frac{2 + 2\,s^2}{(1-s^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_X &= \Psi'_X(0) = \frac{2 \cdot 0}{1-0^2} = 0 \\ \sigma_X^2 &= \Psi''_X(0) = \frac{2 + 2 \cdot 0^2}{(1-0^2)^2} = 2 \end{aligned}$$

(6 Punkte)

d)

$$\begin{aligned} Y &= g(X) = X^3 \\ y &= g(x) = x^3 \\ x &= y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y} \\ g'(x) &= 3\,x^2 \\ f_Y(y) &= \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{\frac{1}{2}\,e^{-|x|}}{3\,x^2} = \frac{1}{6\,\left(\sqrt[3]{y}\right)^2} \cdot e^{-\left|\sqrt[3]{y}\right|} \end{aligned}$$

(4 Punkte)

e) $f_Y(y)$ ist symmetrisch und hat einen Pol bei $y = 0$. Deshalb kann nur $g_1(y)$ die WDF $f_Y(y)$ sein. (2 Punkte)

Aufgabe 3

20 Punkte

a) Ein Vergleich der gegeben WDF mit der WDF einer normalverteilten ZV liefert:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= 0 \\ \sigma_X^2(t) &= 9 \end{aligned}$$

Da $m_X(t) = 0 = \text{const.}$ und $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) = R_{XX}(\tau)$, ist $X(t)$ schwach stationär (WSS).

Da $X(t)$ ein Gaußprozess ist, folgt aus der schwachen Stationarität direkt die strenge Stationarität. (6 Punkte)

b)

$$\mathcal{E}\{U_1\, V_1\} = \mathcal{E}\{a\, X(t_3)\; b\, X(t_3 - t_0)\} = a\, b\, R_{XX}(t_0) = 0$$

Da $\mathcal{E}\{U_1\, V_1\} = \mathcal{E}\{U_1\} \cdot \mathcal{E}\{V_1\}$, sind U_1 und V_1 unkorreliert.

Da $\mathcal{E}\{U_1\, V_1\} = 0$, sind U_1 und V_1 orthogonal.

Da $X(t)$ ein Gaußprozess ist, sind U_1 und V_1 gemeinsam normalverteilt. Deshalb folgt aus der Unkorreliertheit die statistische Unabhängigkeit. (6 Punkte)

c) U_1 und V_1 sind gemeinsam normalverteilt und statistisch unabhängig. Deshalb gilt für die gemeinsame Verbund-WDF:

$$\begin{aligned} m_{U_1} &= 0 \\ m_{V_1} &= 0 \\ \sigma_{U_1}^2 &= \mathcal{E}\left\{(U_1 - m_{U_1})^2\right\} = \mathcal{E}\left\{U_1^2\right\} = \mathcal{E}\left\{(a \cdot X(t))^2\right\} = a^2\, \sigma_X^2 = 9\, a^2 \\ \sigma_{V_1}^2 &= \mathcal{E}\left\{(V_1 - m_{V_1})^2\right\} = \mathcal{E}\left\{V_1^2\right\} = \mathcal{E}\left\{(b \cdot X(t - t_0))^2\right\} = b^2\, \sigma_X^2 = 9\, b^2 \\ f_{U_1 V_1}(u_1, v_1) &= f_{U_1}(u_1) \cdot\; f_{V_1}(v_1) = \frac{1}{18\pi \cdot a\, b} \cdot e^{-\frac{1}{18}\left(\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2}\right)} \end{aligned}$$

(4 Punkte)

d) Y_1 ist eine Linearkombination zweier gemeinsam normalverteilter ZVn (U_1 und V_1). Deshalb ist Y_1 normalverteilt.

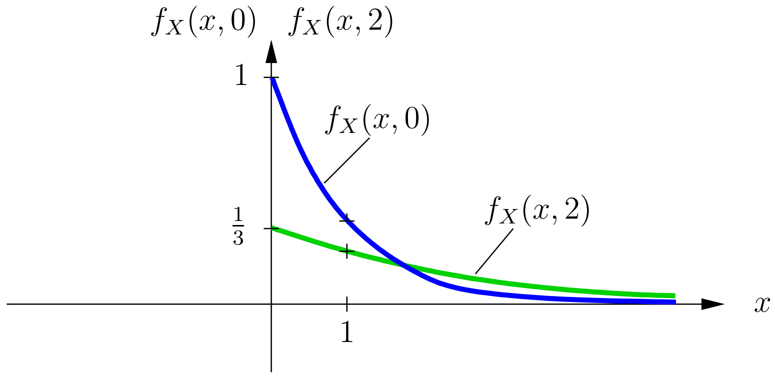
$$\begin{aligned} m_{Y_1} &= \mathcal{E}\{Y_1\} = \mathcal{E}\{U_1 + V_1\} = 0 \\ \sigma_{Y_1}^2 &= \mathcal{E}\left\{(Y_1 - m_{Y_1})^2\right\} = \mathcal{E}\left\{Z_1^2\right\} = \mathcal{E}\left\{(U_1 + V_1)^2\right\} = \mathcal{E}\left\{U_1^2 + 2\, U_1\, V_1 + V_1^2\right\} \\ &= \mathcal{E}\left\{U_1^2 + V_1^2\right\} = m_{U_1}^{(2)} + m_{V_1}^{(2)} = \sigma_{U_1}^2 + \sigma_{V_1}^2 = 9\,(a^2 + b^2) \\ f_{Y_1}(y_1) &= \frac{1}{\sqrt{18\,\pi\,(a^2 + b^2)}} \cdot e^{-\frac{y_1^2}{18\,(a^2+b^2)}} \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4

25 Punkte

a) Skizze:



Nebenrechnung:

$$
\begin{aligned}
f_X(x,0) &= \frac{1}{1}\cdot e^{-x}\cdot\varepsilon(x), & f_X(0,0)=1, && f_X(1,0)=0.37\\
f_X(x,2) &= \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\varepsilon(x), & f_X(0,2)=0.33, && f_X(1,2)=0.24
\end{aligned}
$$

(4 Punkte)

b) Ein Vergleich mit der WDF der Exponentialverteilung liefert $\lambda = \frac{1}{(t+1)\,a}$

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \mathcal{E}\{X(t)\} = \frac{1}{\lambda} = (t+1)\,a\\
R_{XX}(t_3,t_4) &= \mathcal{E}\{X(t_3)\,X(t_4)\}\\
&= \begin{cases} \mathcal{E}\{X^2(t_4)\} = \frac{2}{\lambda^2} = 2\,(t_3+1)^2\,a^2 & \text{für} \quad t_3=t_4\\ \mathcal{E}\{X(t_3)\}\cdot\mathcal{E}\{Xt_4\} = (t_3+1)\,a\cdot(t_4+1)\,a = a^2\,(t_3+1)(t_4+1) & \text{für} \quad t_3\neq t_4\end{cases}
\end{aligned}
$$

Da $m_X(t) \neq$ const., ist der ZP nicht WSS.

(8 Punkte)

c) Da X_1 und X_2 statistisch unabhängig sind, gilt

$$f_{X_1X_2|A}(x_1,x_2|a) = f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{(t_1+1)\,(t_2+1)\,a^2}\cdot e^{-\left[\frac{x_1}{(t_1+1)}+\frac{x_2}{(t_2+1)}\right]\frac{1}{a}}\cdot\varepsilon(x_1)\cdot\varepsilon(x_1)$$

$$J(a) = \ln f_{X_1X_2|A}(x_1,x_2|a)$$

$$= -2\,\ln a - \ln(t_1+1) - \ln(t_2+1) - \left(\frac{x_1}{t_1+1}+\frac{x_2}{t_2+1}\right)\frac{1}{a} \quad \text{für} \quad x_1,x_2\geq 0$$

(4 Punkte)

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(a)}{\partial a} &= -\frac{2}{a} + \left(\frac{x_1}{t_1+1} + \frac{x_2}{t_2+1}\right)\frac{1}{a^2} \overset{!}{=} 0 \\
\left(\frac{x_1}{t_1+1} + \frac{x_2}{t_2+1}\right)\frac{1}{a} &= 2 \\
\hat{a}_{ML} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{t_1+1} + \frac{x_2}{t_2+1}\right) \\
\hat{A}_{ML} &= \frac{1}{2}\left(\frac{X_1}{t_1+1} + \frac{X_2}{t_2+1}\right)
\end{aligned}$$

(5 Punkte)

e)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left\{\hat{A}_{ML}\right\} &= \mathcal{E}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{X_1}{t_1+1} + \frac{X_2}{t_2+1}\right)\right\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}\left\{\frac{X_1}{t_1+1} + \frac{X_2}{t_2+1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1+1}\,m_{X_1} + \frac{1}{t_2+1}\,m_{X_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\,(t_1+1)}{t_1+1} + \frac{a\,(t_2+1)}{t_2+1}\right) = a
\end{aligned}$$

Deshalb ist $\hat{A}_{ML}$ erwartungstreu. (4 Punkte)

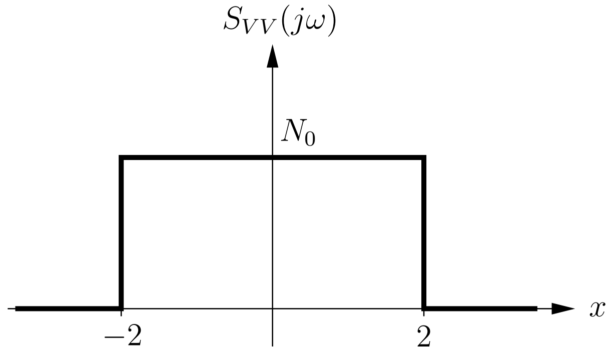
Aufgabe 5

18 Punkte

a) Nebenrechnung:

$$S_{VV}(j\omega) \;=\; |G_2(j\omega)|^2\, S_{NN}(j\omega) = \left(\text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)^2 \cdot N_0 = \text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdot N_0$$

Skizze:



Moment 2. Ordnung

$$m_V^{(2)} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{VV}(j\omega)d\omega = \frac{2\,N_0}{\pi}$$

(5 Punkte)

b)

$$S_{UU}(j\omega) = |G_1(j\omega)|^2 \cdot S_{XX}(j\omega) = \left(\sqrt{1+\omega^2}\cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)^2 \cdot \frac{2}{1+\omega^2} = 2\cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$R_{UU}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{UU}(j\omega)\} = \frac{4}{\pi}\,\text{si}(2\,\tau)$$

(4 Punkte)

c)

$$\begin{aligned} S_{YY}(j\omega) &= S_{(g_1*X+g_2*N)(g_1*X+g_2*N)}(j\omega) = |G_1(j\omega)|^2\, S_{XX}(j\omega) + |G_2(j\omega)|^2\, S_{NN}(j\omega) \\ S_{XY}(j\omega) &= S_{X(g_1*X+g_2*N)}(j\omega) = G_1^*(j\omega)\, S_{XX}(j\omega) \end{aligned}$$

(5 Punkte)

d)

$$H(j\omega) \;=\; \frac{S_{XY}(j\omega)}{S_{YY}(j\omega)} = \frac{G_1^*(j\omega)\, S_{XX}(j\omega)}{|G_1(j\omega)|^2\, S_{XX}(j\omega) + |G_2(j\omega)|^2\, S_{NN}(j\omega)}$$

(4 Punkte)